$$V_{n+1}=\frac{4-U_n}{2(U_n-2)}=\frac{2-U_n}{2(U_n-2)}+\frac{2}{2(U_n-2)}$$

$$=-\frac{1}{2}+V_n$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique

de raison $r=-\frac{1}{2}$

b/*/ (V_n) est une suite arithmétique

de raison $r=-\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$V_0=\frac{1}{U_0-2}=\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

Donc :

$$V_n=V_0+nr=-1-\frac{1}{2}n$$

Donc $\forall n\in\square$: $\boxed{V_n=-1-\frac{1}{2}n}$

*/ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-\frac{1}{2}n)=-\infty$

c/ on sait que : $V_n=\frac{1}{U_n-2}$

Donc $U_n-2=\frac{1}{V_n}$ d'où :

$$U_n=\frac{1}{V_n}+2\Leftrightarrow U_n=\frac{-1}{1+\frac{n}{2}}+2\quad\forall n\in\square$$

$$\Leftrightarrow U_n=\frac{-1}{\frac{2+n}{2}}+2=\frac{-2}{2+n}+2$$

$\forall n\in\square$: $\boxed{U_n=\frac{-2}{2+n}+2}$

d/ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2}{n+2}+2=0+2=2$.

Exercice 3

$$\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=\sqrt{6+U_n},n\in\square\end{cases}$$

1) a/*/ pour $n=0$ on a : $0\le U_0=0\le 3$ vrai

*/ supposons que $0\le U_n\le 3$

et montrons que $0\le U_{n+1}\le 3$

On a : $0\le U_n\le 3\Leftrightarrow 3\le U_n+6\le 9$

$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{3}\le\sqrt{U_n+6}\le\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow 0\le U_{n+1}\le 3$

Donc $\forall n\in\square$: $0\le U_n\le 3$

b/ $\forall n\in\square$

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_n+6}-U_n$$

$$=\frac{\left(\sqrt{U_n+6}-U_n\right)\times\left(\sqrt{U_n+6}+U_n\right)}{\sqrt{U_n+6}+U_n}$$

$$=\frac{U_n+6-U_n^2}{\sqrt{U_n+6}+U_n}$$

On a :

$U_n+\sqrt{U_n+6}\ge 0$ car $U_n\ge 0$

Étudions donc le signe de $-X^2+X+6$

On a : $-X^2+X+6=0$; $\Delta=1+24=25$

Donc $x'=\frac{-1+5}{-2}=-2$; $x''=\frac{-1-5}{-2}=3$

X	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-X^2+X+6$	$-$	0	$+\ 0$	$-$

Donc $-X^2+X+6\ge 0$ pour $x\in[-2,3]$

Comme $U_n\in[0,3]\subset[-2,3]$

On aura $-U_n^2+U_n+6\ge 0$ et par suite

$$\frac{U_n+6}{\sqrt{U_n+6}+U_n}-U_n^2\ge 0$$

Conclusion :

$U_{n+1}-U_n\ge 0$ Donc (U_n) est une suite croissante.

c/ */ (U_n) est une suite croissante et majorée par 3

donc (U_n) converge vers $\ell\in[0,3]$

*/ • $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\sqrt{x+6}$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$ et $\ell\in[0,3]$

• f Continue en ℓ car $[0,3]\subset[-6,+\infty[$

D'où $f(\ell)=\ell\Leftrightarrow\sqrt{\ell+6}=\ell$